Geometría en una retícula

Alumnos de ESTALMAT-Andalucía
Pascual Jara

X Concurso Ciencia en Acción. Granada-2009

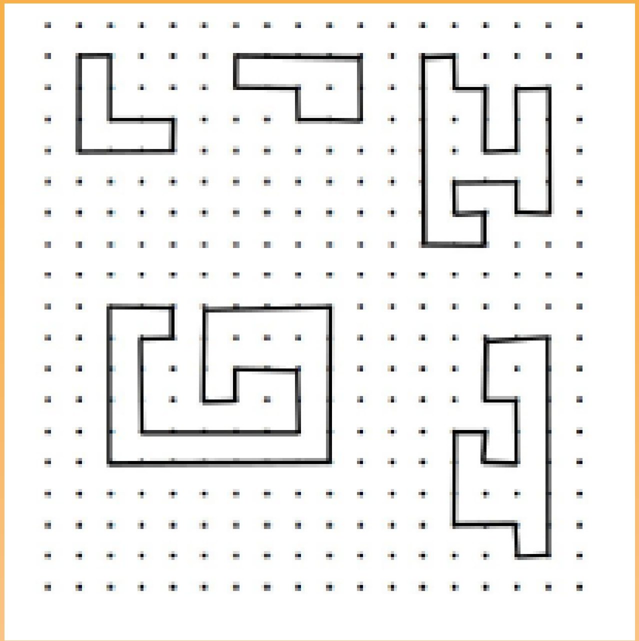
ADELANTE

Contenido

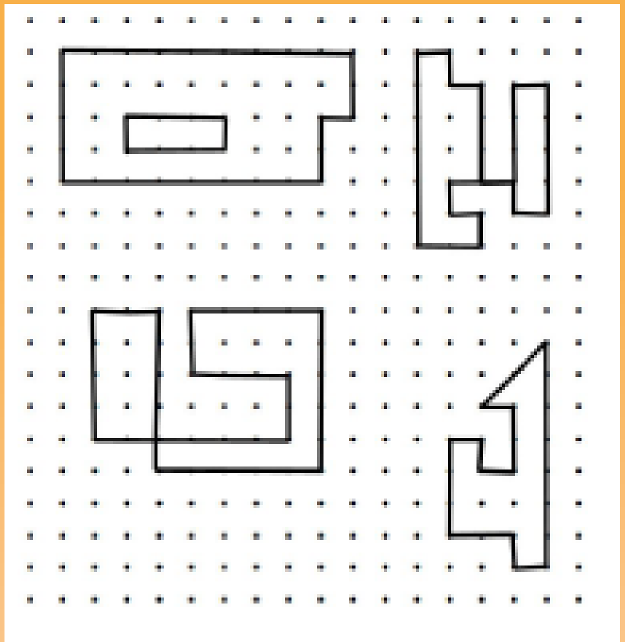
- Recubrimientos del plano con figuras reticulares
- Actividades en una retícula
- El teorema de Pick
- El *Stomachion* de Arquímedes
- Zapatero a tus zapatos
- Circunferencias en una retícula

ADELANTE

Ejemplos de figuras reticulares y no reticulares



Las figuras reticulares no tienen agujeros ni puntos singulares

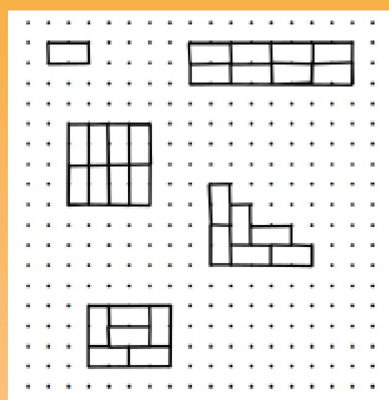


Estas figuras no son reticulares

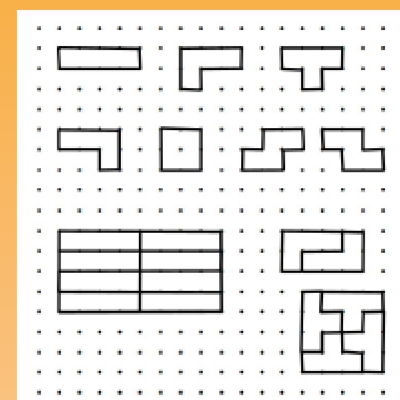
ADELANTE

¿Con qué tipo de figuras reticulares podemos recubrir el plano?

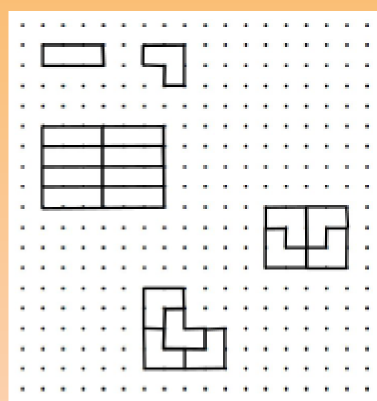
Monomino 1	Dimino 1	Trimino 2	Cuatrimino 7	Pentamino …



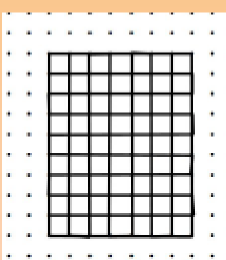
Si



Si



Si

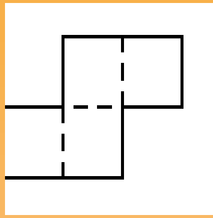


Sí

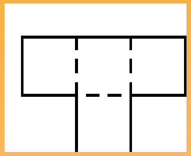
ADELANTE

Con algunos cuatriminos podemos recubrir algunas regiones rectangulares. Con otros no.

Estudia estos cuatriminos



Cuatrimino "S"



Cuatrimino "T"

Con el cuatrimino "T" puedes formar ciertos rectángulos. ¿Y con el cuatrimino "S"?

ADELANTE

Con los otros *xyminos* vamos a tener aún más diversidad; Incluso con alguno de ellos no podremos recubrir, no ya un rectángulo, sino que no podremos recubir el plano completo.

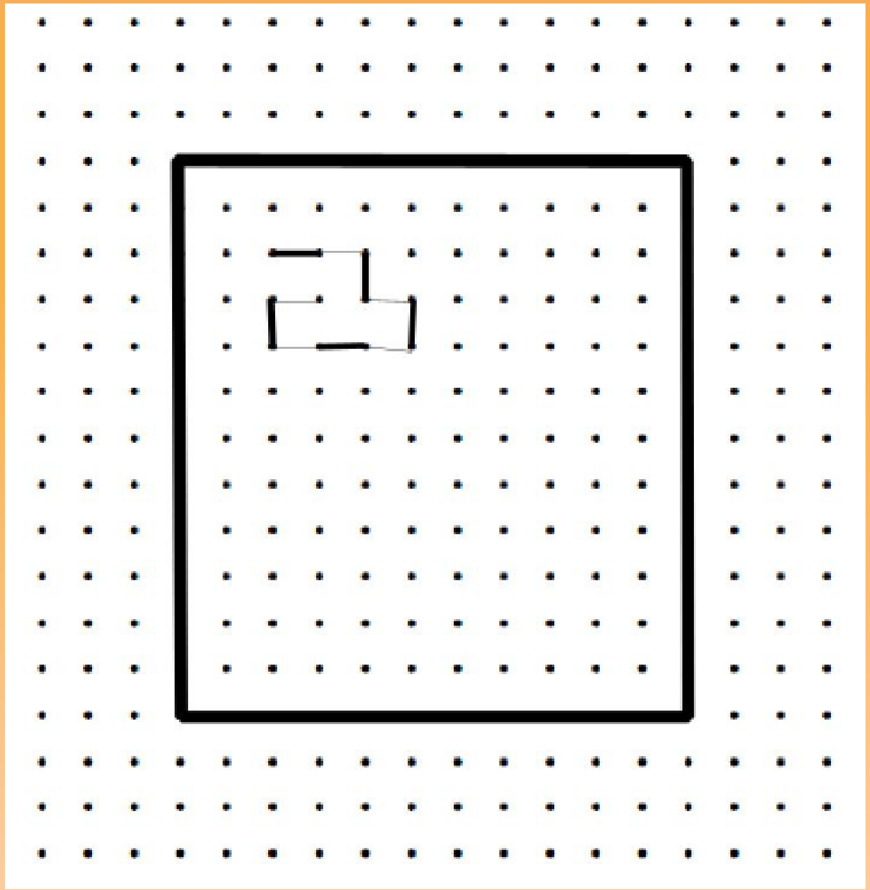
Da un ejemplo de alguno de estos.

ADELANTE

Un juego simple

REGLAS:

- Se delimita una región cerrada de la retícula (por ejemplo un rectángulo)
- El primer jugador une por un segmento dos puntos de la retícula que estén contiguos en al misma fila o columna.
- El segundo jugador elige uno de los puntos extremos, y lo une con otro nuevo que esté contiguo en la misma fila o columna.
- Por turnos se repite este proceso.
- Pierde el jugador que no puede realizar movimientos



Análisis, desarrollo y objetivos

1. El primer objetivo que se persigue es el de diseñar un juego mediante reglas simples que no lleven a indeterminaciones. Es claro que las reglas que hemos elegido no son únicas ni son universalmente aceptadas.

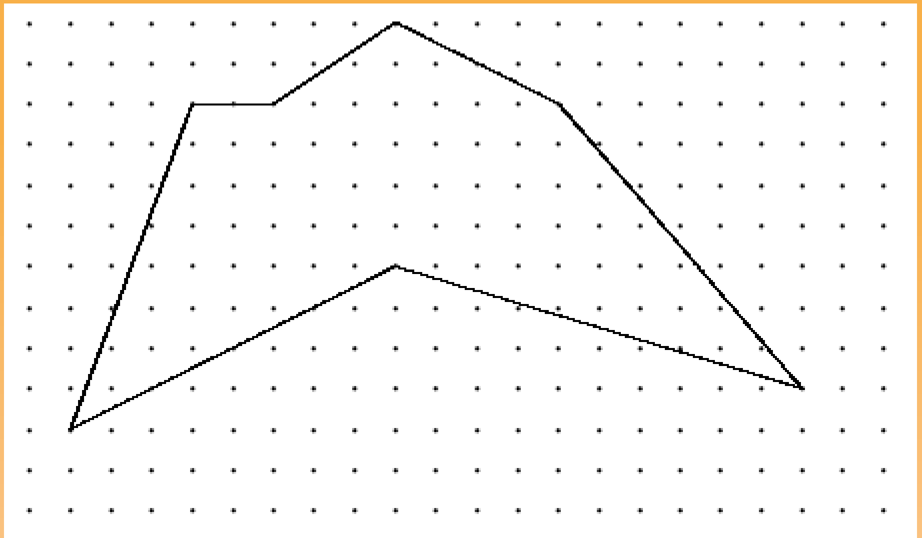
2. Desarrollo de estrategias ganadoras o no perdedoras comenzando por el análisis de partidas desarrolladas en recintos pequeños.

3. ¿Existen estrategias ganadoras en este juego?

ADELANTE

¿Cómo medir el área de un polígono haciendo aritmética?

Para calcular el área, A(P), del polígono de la figura basta contar el número de vértices en el borde , B(P), y en el interior, I(P).



El área viene dada por la fórmula:

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

ADELANTE

Aplicaciones

Este resultado es de interés en ciertos contextos.
Uno, que es particularmente curioso, es el que tiene que ver con la posibilidad o no de dibujar polígonos regulares en una retícula.

ADELANTE

Cuadrados

Un cuadrado se puede dibujar, y es posible hacerlo de varias formas, no es necesario que sus lados sigan las líneas de la retícula.

Haz algunos de estos y calcula su área.

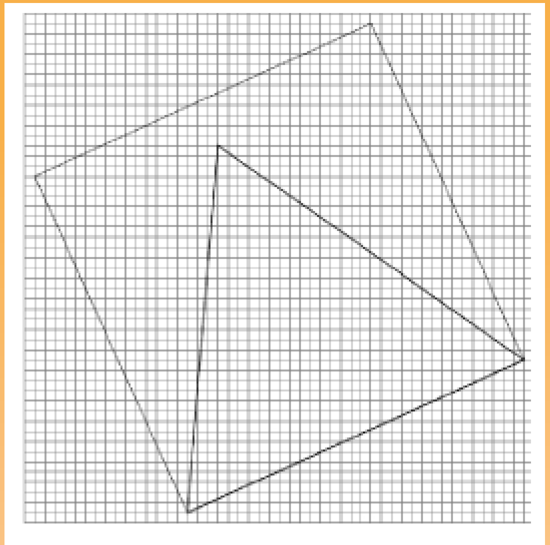
¿Cuáles son los posibles valores de estas áreas?

ADELANTE

Triángulos equiláteros y otros polígonos

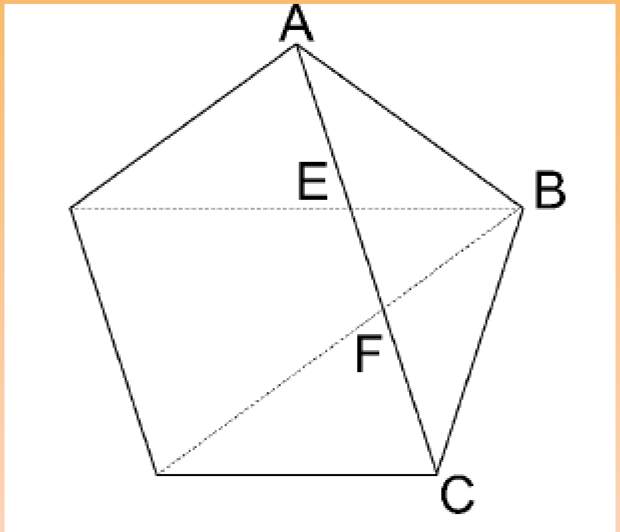
Vamos a hacer entrar a los números irracionales en escena.

¿Es posible dibujar un triángulo equilátero?



¿Qué ocurre en el caso de un pentágono regular?

¿Qué polígonos se pueden dibujar en una retícula?



ADELANTE

El *Stomachion* de Arquímedes

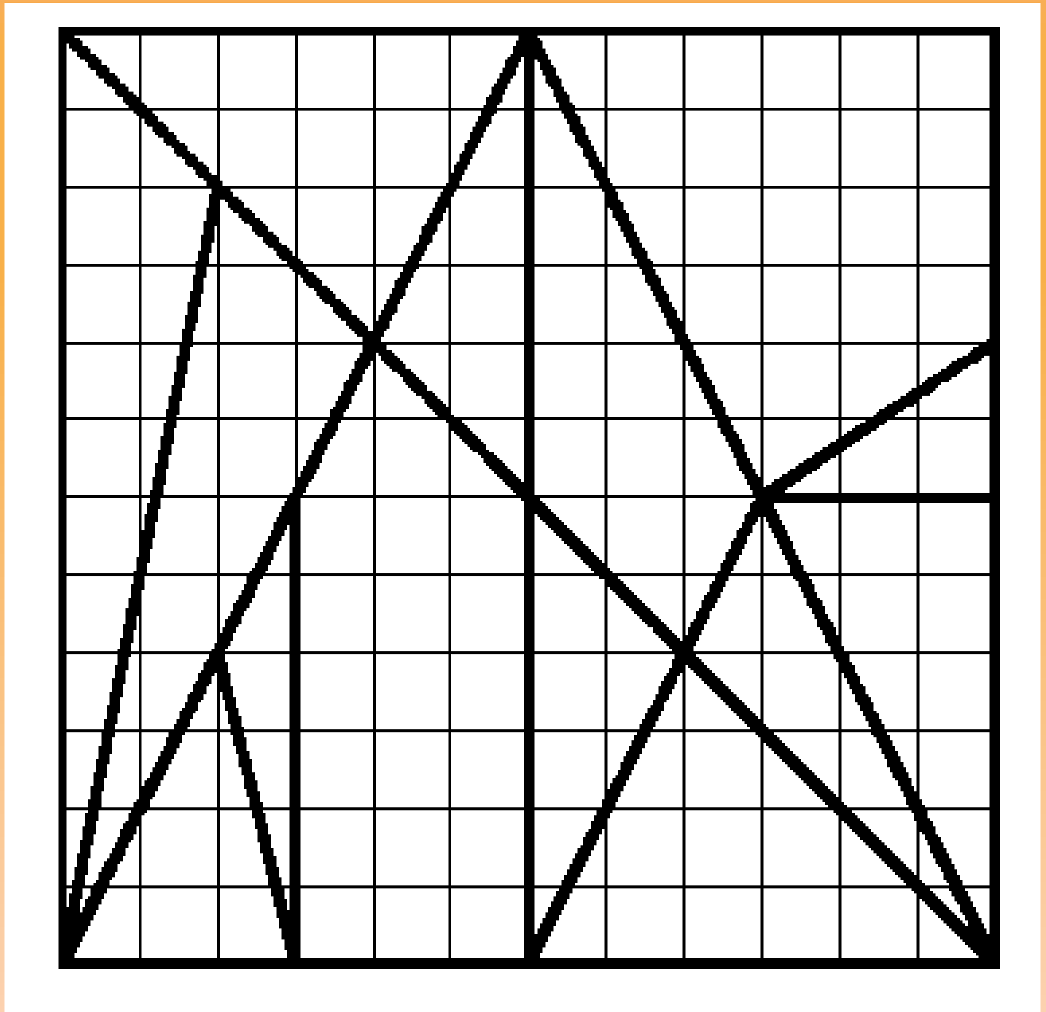
Éste es un ejemplo de una división del cuadrado, similar al “*tangram*”. Sea atribuye a Arquímedes su introducción, quien al parece lo empleaba para estudiar problemas de combinatoria.

Curiosidad histórica:
Los trabajos de Arquímedes se perdieron, pero alguno debió de permanecer o ser copiado, ya que los árabes en la Edad Media trabajaron con un juego exactamente igual al *Stomachion* de Arquímedes.

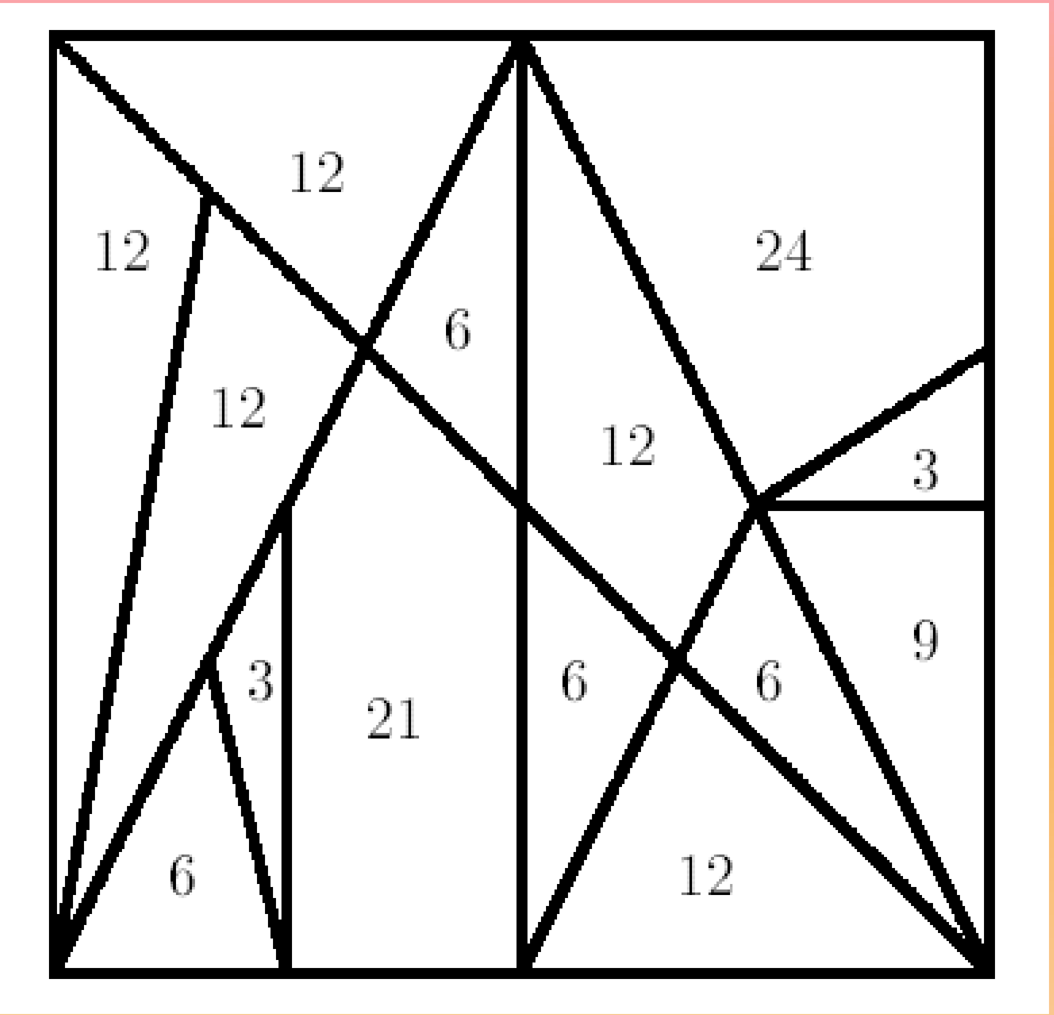
Para nosotros de interés ya que proporciona una ejemplo de cómo medir áreas utilizando el Teorema de Pick.

ADELANTE

Determina el área de cada una de la piezas del *Stomachion*



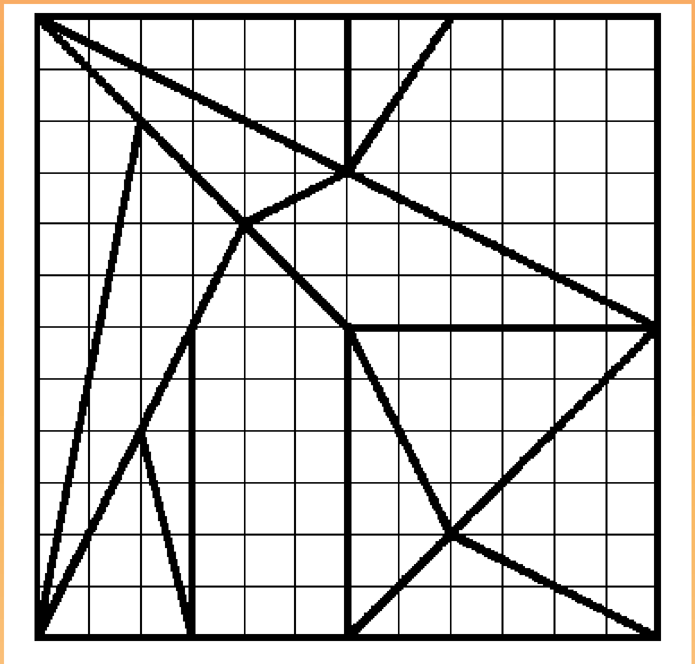
ADELANTE

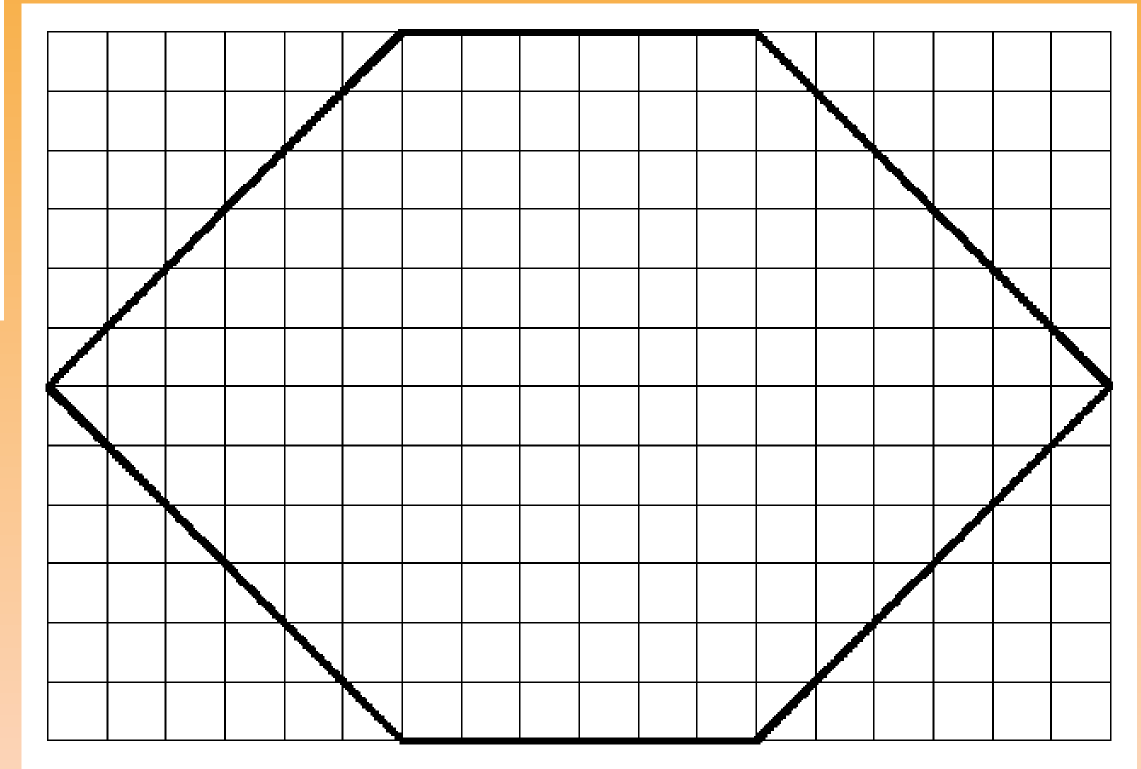


¡Curiosamente todos son números enteros!

ADELANTE

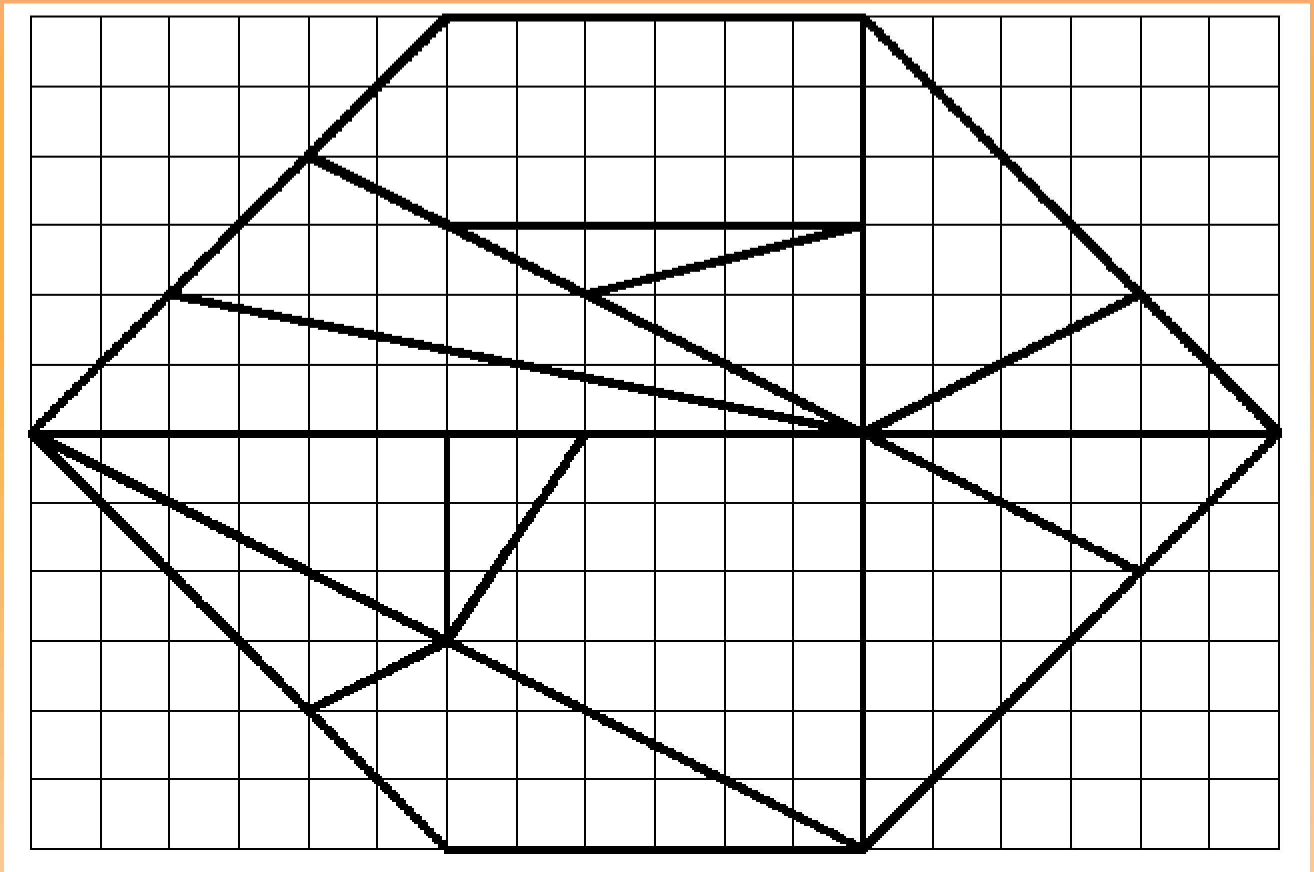
Al igual que el *tangram* podemos formar figuras, o reconstruir el cuadrado, a partir de las piezas del *Stomachion*.





ADELANTE

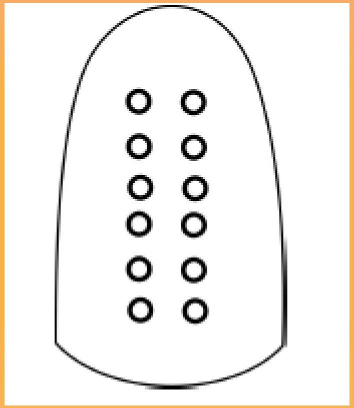
He aquí la solución al hexágono (¿puede ser el hexágono regular?)



ADELANTE

Un problema de optimización

¿Cómo poner los cordones a los zapatos para que la longitud del mismo sea mínima?



He aquí varios ejemplos.
¿Cuál de ellos es el que utiliza menos cordón?

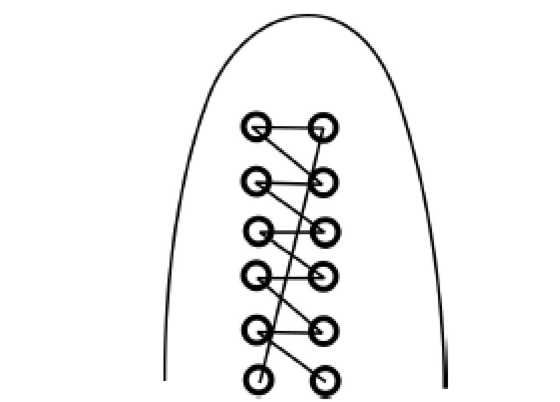


Figura 12. Modo clásico

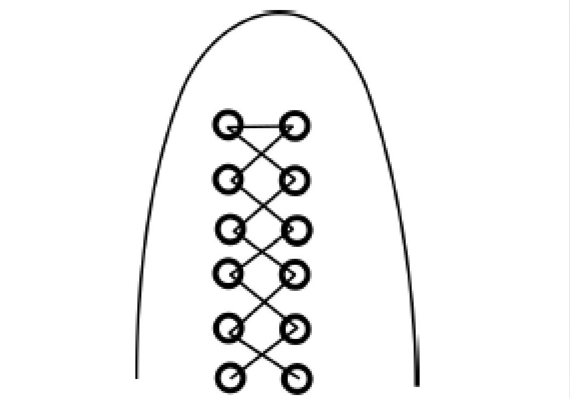


Figura 13. Modo deportivo

ADELANTE

Vamos a hacer un modelo para estudiar este problema a través de una retícula:

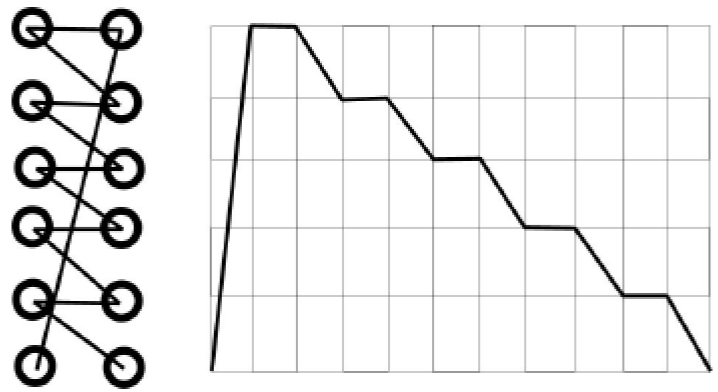


Figura 19. Modo clásico. IV

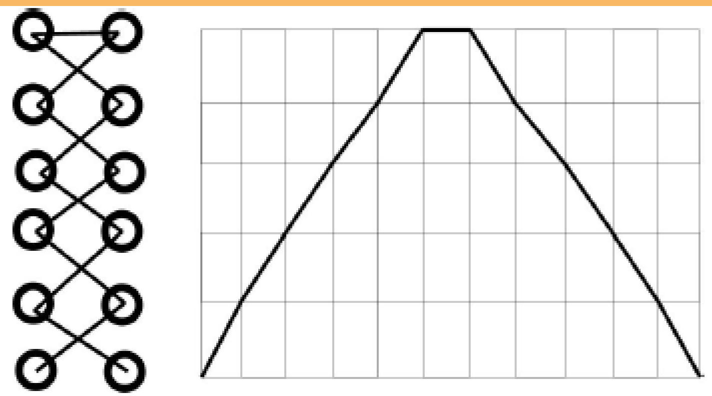


Figura 20. Modo deportivo. IV

ADELANTE

Comentarios:

Ahora no tenemos que hacer los cálculos necesarios para medir la longitud exacta del cordón; en ese modelo nos basta medir el perímetro del polígono reticulado.

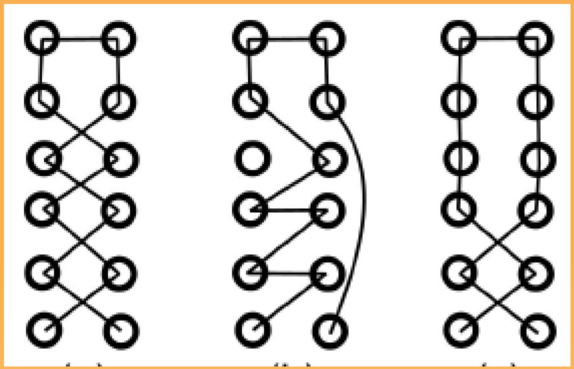
¿Existe alguna relación entre el perímetro de un polígono y su área?
¿Algo parecido a la Fórmula de Herón que todo el mundo conoce?

Parece que la respuesta a esta última pregunta es NO.
Sin embargo, es curioso que podemos utilizar el área para conseguir un perímetro mínimo.

ADELANTE

¿Qué es importante en esta actividad?

Es necesario definir claramente cuando un cordón está correctamente colocado.



Solo el acordonado primero es correcto;
¿cómo definirías cuando un acordonado es correcto?

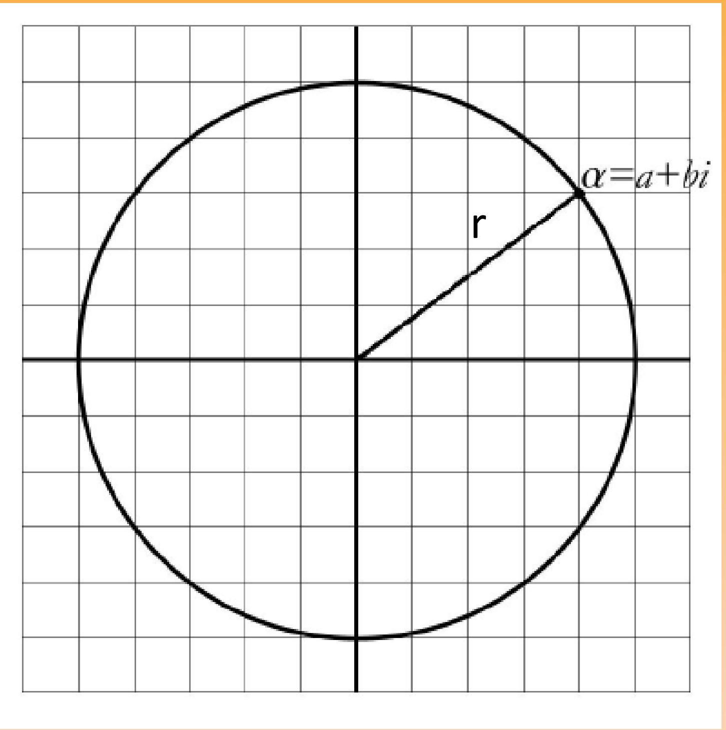
Una vez resuelto este problema se trata de dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Hay un acordonado mínimo?
¿Cuál es este mínimo?
¿Cómo podemos probarlo?

ADELANTE

¿Qué circunferencias podemos construir en una retícula?

Primero comprobamos que, mediante traslaciones podemos solo considerar circunferencias centradas en el origen (0,0) del sistema de coordenadas, y que por lo tanto solo hay que determinar el radio de las mismas.



ADELANTE

Los problemas

En esta situación hay problemas aún no resueltos, nosotros vamos a ver solo aquellos que podemos abordar.

1. Dado un posible radio r, determinar si la circunferencia de radio r tiene puntos en la retícula.
2. Dado un punto determinar los puntos de la retícula que están sobre la circunferencia.

Éste último problema nos lleva, de forma natural, a estudiar la descomposición en primos y a trabajar con números complejos como un instrumento para representar puntos del plano.

3. ¿Cuántos puntos hay en el interior de la circunferencia?

Este problema nos conduce al estudio del número PI.

ADELANTE

MUCHOS OTROS PROBLEMAS SE PUEDEN PLANTEAR EN UNA RETÍCULA; POR AHORA CONSIDRAMOS QUE ES SUFICIENTE.

LA VENTAJA QUE PRESENTA LA APROXIMACIÓN LÚDICA QUE HEMOS DESARROLLADO ES QUE DE FORMA NATURAL SURGEN LOS CONCEPTOS Y RESULTADOS CLÁSICOS DE LA MATEMÁTICA, COMO POR EJEMPLO EL NÚMERO pi O EL TEOREMA DE PITÁGORAS.

TAMBIÉN PERMITE MODELIZAR PROBLEMAS DE LA VIDA REAL, DESARROLLAR Y ESTUDIAR ESTRATEGIAS DE JUEGO Y FORZAR LA CREATIVIDAD DEL POSIBLE USUARIO.

¡MUCHAS GRACIA POR SU AMABLE ATENCIÓN!